Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

Национално зимно математическо състезание

за ученици от VIII до XII клас

Сливен, 24-26.01.2025

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 8.1. Решете неравенството

$$(\sqrt{15}-4)x+(\sqrt{8}+3)\sqrt{10}>5\sqrt{3}+\sqrt{96}$$

и проверете кои от числата

$$p=\frac{\sqrt{28}-\sqrt{175}}{2(\sqrt{63}+\sqrt{112})} \text{ и } q=-\sqrt{\frac{\sqrt{48}-\sqrt{27}}{\sqrt{300}+\sqrt{363}}}$$

са решения на това неравенство.

Отговор. $x<\sqrt{5}-\sqrt{6}$; и p, и q са решения.

Решение. Имаме $(\sqrt{15}-4)x>\sqrt{5}\sqrt{15}+4\sqrt{6}-\sqrt{80}-3\sqrt{10}$

$$(\sqrt{15}-4)x>\sqrt{5}\sqrt{15}+4\sqrt{6}-4\sqrt{5}-\sqrt{6}\sqrt{15}$$

$$(\sqrt{15}-4)x>(\sqrt{15}-4)(\sqrt{5}-\sqrt{6}).$$

С деление на $\sqrt{15}-4<0$ получаваме отговора на неравенството: $x<\sqrt{5}-\sqrt{6}$.

$$p=\frac{2\sqrt{7}-5\sqrt{7}}{2(3\sqrt{7}+4\sqrt{7})}=\frac{-3\sqrt{7}}{14\sqrt{7}}=-\frac{3}{14};$$

искаме $p<\sqrt{5}-\sqrt{6} \iff \sqrt{6}<\frac{3}{14}+\sqrt{5}$. Понеже двете страни са положителни, това условие е равносилно с $6<\frac{9}{196}+\frac{3}{7}\sqrt{5}+5 \iff \frac{187}{196}<\frac{3}{7}\sqrt{5} \iff 187<84\sqrt{5} \iff 34969<35280$, което е вярно, т.е. p е решение.

$$q=-\sqrt{\frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{3}}{10\sqrt{3}+11\sqrt{3}}}=-\sqrt{\frac{1}{21}};$$

искаме $q<\sqrt{5}-\sqrt{6} \iff \sqrt{6}<\sqrt{\frac{1}{21}}+\sqrt{5}$. Понеже двете страни са положителни, това условие е равносилно с $6<\frac{1}{21}+2\sqrt{\frac{5}{21}}+5 \iff \frac{20}{21}<2\sqrt{\frac{5}{21}} \iff 10<\sqrt{105} \iff 100<105$, което е вярно, т.е. и q е решение.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за получаване на $x<\sqrt{5}-\sqrt{6}$ (само 1 т., ако е получено $x>\sqrt{5}-\sqrt{6}$); 1 т. за пресмятане на p; 1 т. за пресмятане на q; 1 т. за обосновка, че p е решение; 1 т. за обосновка, че q е решение.

Задача 8.2. Даден е правоъгълен триъгълник ABC с катети $AC=12$ см и $BC=5$ см. Точките M и N са средите съответно на страните AB и BC, а точката D от отсечката CM е такава, че $CD=CN$. Ъглополовящата на $\measuredangle MCN$ пресича отсечката BD в точка K, а правите AD и MK се пресичат в точка L. Да се намери дължината на отсечката BL.

Отговор. 8 см

Решение. Нека точката T върху правата CD е такава, че $CD = DT$ и D е между C и T. Триъгълникът BCT е равнобедрен, значи правата CK съдържа медианата през C, а BD също е медиана – следователно K е медицентър на BCT и в частност $BK = 2KD$.

Сега ще докажем, че K е медицентър на ABL и в частност, че D е средата на AL. Ако D' е средата на AL и $K' = BD' \cap LM$, то K' е медицентър на ABL, значи $BK' = 2K'D$. Сега чрез средите на BK и BK' и съображения за средни отсечки следва $KK' \parallel DD'$, което при $D \not\equiv D'$ и $K \not\equiv K'$ води до противоречие, понеже тези две прави се пресичат в L. Следователно D е средата на AL.

Така DM е средна отсечка в триъгълника ABL и $BL = 2MD = 2CM - 2CD = AB - 2CN = AB - BC$. Остава да отбележим, че $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 13$ см от Питагоровата теорема, съответно $BL = 8$ см.

Оценяване. (6 точки) 4 т. за доказване, че D е среда на AL (от тях 1 т. за въвеждане на T, 1 т. за $BK = 2KD$ и 2 т. за доказване на аргумент с единственост (или друга подходяща техника) относно средата на AL); 2 т. за $BL = AB - BC$ и завършване.

Задача 8.3. За всяко естествено число x ще бележим с $S(x)$ сбора на цифрите му. На дъската е записано четирицифрено число n. Двама играчи, А и Б, се редуват; първи е А. Този, който е на ход, заменя числото на дъската, да го наречем x, с *друго* четирицифрено число y, такова че $S(x) - S(y) \leq k$ и всяка от цифрите на y е не по-голяма от съответната цифра на x. Който не може да играе, губи, а другият печели. Двамата играчи са достатъчно умни и мотивирани за победа. Намерете броя на тези n, при които А ще спечели, ако:

а) $k = 4$; б) $k = 3$.

Отговор. а) 7200 б) 6751

Решение. Ще бележим с $r(x)$ остатъка при деление на $S(x)$ с $k + 1$. Ще покажем, че подходящите n са тези, при които $r(n) \neq 1$. Действително, ако $r(x) \neq 1$, то играчът може да напише число y, за което $r(y) = 1$, намалявайки подходящи цифри така, че сборът да намалее с $r(x) - 1$ (ако $r(x) > 1$) или с k (ако $r(x) = 0$). От друга страна, ако $r(x) = 1$, то или на дъската пише 1000 и играчът губи, или за изиграното от него число y е в сила $r(y) \neq 1$ и противникът може да го върне отново в позиция, при която остатъкът е 1; понеже сборът от цифрите намалява, то рано или късно ще се случи първата възможност.

а) Сред 10 числа, които се различават само по последната си цифра, има 8, при които остатъкът при деление с 5 на сбора на цифрите е различен от 1, така че търсеният брой е $\frac{4}{5} \cdot 9000 = 7200$.

б) Ще докажем, че сред числата x, имащи поне една цифра, различна от 0 и 1, точно $\frac{3}{4}$ изпълняват $r(x) \neq 1$. Наистина, това е вярно за всички x, чиято първа цифра не е 1, понеже можем да ги групираме в множества от числа, различаващи се само по първата си цифра, във всяко от които твърдението е вярно. Също така това е вярно за всички x, чиято първа цифра е 1, но втората не е 0 или 1, понеже можем да ги групираме в множества от числа, различаващи се само по втората си цифра, във всяко от които твърдението е вярно. По подобна причина това е вярно за всички x, чиито първи две цифри са 0 или 1, но третата не е 0 или 1, както и за всички x, чиито първи три цифри са 0 или 1, но последната не е 0 или 1. Остава да анализираме осемте числа x, записани само с 0 и 1; сред тях $r(x) = 1$ е в сила само за 1000. Окончателно търсеният брой е $\frac{3}{4}(9000 - 8) + 7 = 6751$.

Оценяване. (7 точки) 3 т. за правилно и аргументирано пресмятане на отговора на а); 4 т. за правилно и аргументирано пресмятане на отговора на б) (ако методът не позволява точен, а само приблизителен отговор, дори с разлика от 1 от верния, то не се присъждат никакви точки; ако методът позволява точен отговор, но има технически грешки, то се отнема по 1 т. за всяка такава грешка).

Задача 8.4. Двойката (m, n) от нечетни естествени числа ще наричаме *сливенска*, ако $m > n$ и към числата m^3 и n^3 може да се прибави едно и също естествено число, така че двата получени сбора да са степени на числото 2.

а) Да се даде пример за сливенска двойка.

б) Да се докаже, че за всяка сливенска двойка е изпълнено неравенството

$$m \geq n^3 + n + 3.$$

Решение. а) Например $(m, n) = (5, 1)$, понеже $1^3 + 3 = 2^2$ и $5^3 + 3 = 2^7$.

б) При $m^3 + r = 2^a$, $n^3 + r = 2^b$ за $m > n$ имаме $2^a - 2^b = m^3 - n^3$, т.е. $2^b(2^{a-b} - 1) = (m-n)(m^2+mn+n^2)$. Понеже m и n са нечетни, такова е и m^2+mn+n^2, значи непременно 2^b дели $m - n$. Оттук $m \geq 2^b + n = n^3 + n + r$. Остава да отбележим, че $r \geq 3$, понеже $m^3+2 = 2^b$ е невъзможно поради четност, а в $(m+1)(m^2-m+1) = m^3+1 = 2^b$ множителят $m^2 - m + 1$ е нечетен и по-голям от 1, тъй като $m \geq 2$.

Коментар. Твърдението не е вярно за четни m, n: контрапример $(40; 8)$ (естествено породен от дадения в решението).

Оценяване. (7 точки) 1 т. за а); 6 т. за б), от които 1 т. за разглеждане на $2^b(2^{a-b} - 1) = (m - n)(m^2 + mn + n^2)$ (но не и на друго уравнение), 2 т. за доказване, че $m - n$ се дели на 2^b, 2 т. за обосновка защо от това, че $m - n$ се дели на 2^b, следва $m \geq n^3 + n + r$, общо 1 т. за отхвърляне на $r = 1$ и $r = 2$.

Задача 9.1. За кои стойности на реалното число k системата уравнения

$$\left| \begin{array}{rcl} 3x^2 - 2xy + y^2 & = & 2k + 2 \\ 2x^2 + 4xy + y^2 & = & 7k + 7 \end{array} \right.$$

има решение в реални числа?

Решение. Събираме двете уравнения и получаваме $5x^2+2xy+2y^2 = 9k+9$ или след отделяне на точни квадрати $(2x + y)^2 + (x - y)^2 = 9k + 9$. Тъй като лявата страна е неотрицателна, трябва и дясната да е неотрицателна и значи $k \geq -1$. Това условие е и достатъчно, защото $x = y = \sqrt{k+1}$ е решение на системата.

Оценяване. (6 точки) 4 т. за разбиването на сумата на точни квадрати; 1 т. за ограничението за k; 1 т. за достатъчността.

Задача 9.2. Алис ще получи награда, ако след 10 изиграни раздавания на карти срещу Боб е спечелила поне 5 от тях. Тя знае, че вероятността да спечели е 50% за всяко раздаване. Алис също така може да бележи картите и така да си осигури победа, но на всяко раздаване има 4% вероятност Боб да открие измамата и тя да загуби наградата. В началото на играта

Алис избира една от двете стратегии и се придържа към нея докрай. Коя стратегия е по-добра за Алис – да играе честно или да бележи картите?

Отговор. Втората стратегия.

Решение. Тъй като Алис може да спечели точно n раздавания по $\binom{10}{n}$ начина, а всички възможни изходи от десетте игри са 2^{10}, вероятността тя да спечели точно n раздавания е:

$$\frac{\binom{10}{n}}{2^{10}}.$$

Тогава вероятността Алис да спечели поне 5 раздавания при първата стратегия е

$$1-\sum_{n=0}^{4}\frac{\binom{10}{n}}{2^{10}}=1-\frac{\binom{10}{4}}{1024}-\frac{\binom{10}{3}}{1024}-\frac{56}{1024}=1-\frac{\binom{11}{4}}{1024}-\frac{56}{1024}=\frac{319}{512}<\frac{319}{500}=0{,}638.$$

Алтернативно с размяна на ролята на двамата играчи можем да заключим, че вероятността победите да са не повече от 4 е равна на вероятността те да са поне 6. Така вероятността Алис да спечели поне 5 пъти е равна на

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{\binom{10}{5}}{2^{10}}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{63}{256}\right)<0{,}63.$$

Вероятността Алис да спечели наградата при втората стратегия е точно вероятността тя да не бъде хваната нито веднъж в 10-те поредни раздавания, или:

$$(1-0{,}04)^{10}=((1-0{,}04)^5)^2>(1-0{,}04\cdot 5)^2=0{,}8^2=0{,}64.$$

Следователно втората стратегия е по-печеливша.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за формулата за вероятността при първата стратегия; 1 т. за формулата за вероятността при втората стратегия; по 1 т. за коректно пресмятане на вероятността при всяка от стратегиите или подходяща оценка; 1 т. за довършване.

Коментар. Неравенството при втората вероятност получихме от неравенство на Бернули, но подобна оценка може да се направи и с директна сметка. Неравенството на Бернули е класическо и често използвано в задачи за вероятности. Класическа оценка съществува и за първата вероятност - чрез функция на двоичната ентропия, която често се използва при сума на биномни коефициенти, но това няма да опрости сметките в случая.

Задача 9.3. Даден е остроъгълен триъгълник ABC. Вписаната в него окръжност ω допира страната AB в точката D, а точката M е средата на AB. Втората допирателна от M към ω пресича ω в точката K. Ако S е средата на CD, да се намерят всички възможни стойности на отношението $CS : KS$.

Отговор. 1.

Решение. Нека N е допирната точка на външно вписаната за $\triangle ABC$ окръжност срещу страната AB и нека CN пресича ω в точките K' и L, като K' е между N и L.

Първо ще докажем, че L е диаметрално противоположна на D в ω. Да разгледаме хомотетия φ с център C, която изпраща ω във външно вписаната за $\triangle ABC$ окръжност срещу страната AB. Точките L и K' отиват в точки от правата CL, които лежат върху външно вписаната окръжност, като L отива в по-близка до C точка от K'. Единствената възможност е φ да изпрати L в N. В такъв случай има права през L, която е успоредна на AB и φ я изпраща в AB, теост тази права е допирателна към ω в L. От тук получаваме, че L е диаметрално противоположна на D в ω.

Сега намираме $\measuredangle CK'D = \measuredangle LK'D = 90^\circ$ и $\measuredangle NK'D = 90^\circ$. От правоъгълния $\triangle NK'D$ имаме $K'M = MD$ (тъй като D и N са симетрични относно M и значи M е среда на DN), откъдето следва, че MK' е допирателна към ω, т. е. K' съвпада с K. Накрая от правоъгълния $\triangle KDC$ получаваме $KS = CS$ и значи $CS : KS = 1$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за построяване на точките L, N; 3 т. за доказване, че L е диаметрално противоположна на D в ω; 2 т. за $K' \equiv K$; 1 т. за довършване.

Задача 9.4. Да се намерят всички тройки (k, m, n), $k \geq 2$, от естествени числа, такива че произведението

$$\binom{2}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{6}{3} \cdots \binom{2(2^m-1)}{2^m-1} \cdot \binom{2\cdot 2^m}{2^m}$$

се дели на 2^{n^k}, но не се дели на 2^{n^k+1}.

(За естествени числа $a \geq b$ с $\dbinom{a}{b}$ се означава числото $\dfrac{a!}{b!(a-b)!}$.)

Отговор. $(2,5,9)$ и $(4,5,3)$.

Решение. Първо ще изведем израз относно m (в затворен вид) за най-високата степен на двойката, която дели произведението от условието. От формулата на Льожандър $\nu_2(a!) = \sum\limits_{b\geq 1} \left\lfloor \dfrac{a}{2^b} \right\rfloor$ получаваме за $i \leq 2^m$

$$\nu_2\left(\frac{(2i)!}{(i!)^2}\right) = \nu_2\left(\frac{2^i\cdot 1\cdot 3\cdots(2i-1)}{i!}\right) = i - \sum_{b=1}^{m} \left\lfloor \frac{i}{2^b} \right\rfloor, \tag{†}$$

откъдето търсената максимална степен е $2^{m-1}(2^m+1) - \sum_{i=1}^{2^m}\sum_{b=1}^{m} \left\lfloor \frac{i}{2^b} \right\rfloor$. Със смяна на реда на сумите (††) и отделяйки $i = 2^m$ от останалите събираеми, получаваме

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2^m}\sum_{b=1}^{m} \left\lfloor \frac{i}{2^b} \right\rfloor &= \sum_{b=1}^{m}\sum_{i=1}^{2^m} \left\lfloor \frac{i}{2^b} \right\rfloor = \sum_{b=1}^{m} 2^{m-b} + \sum_{b=1}^{m-1}\sum_{j=0}^{2^{m-b}-1} j\cdot 2^b \quad (*)\\ &= 2^m - 1 + \sum_{b=1}^{m-1} 2^{m-b-1}\cdot(2^{m-b}-1)\cdot 2^b = 2^m - 1 + 2^{m-1}\sum_{b=1}^{m-1}(2^{m-b}-1)\\ &= 2^m - 1 + 2^{m-1}(2^m - 2 - (m-1)) = 2^{2m-1} - (m-1)2^{m-1} - 1.\end{aligned}$$

Оттук желаната степен е $2^{2m-1} + 2^{m-1} - (2^{2m-1} - (m-1)2^{m-1} - 1) = m2^{m-1} + 1$. $(**)$

Ако $k \geq 3$ е нечетно, то в $m2^{m-1} = (n-1)(n^{k-1} + n^{k-2} + \cdots + n + 1)$ вторият множител е нечетен, откъдето $n-1$ се дели на 2^{m-1} и $m > n^{k-1} \geq n^2 > 2^{2m-2}$, противоречие.

За да покрием четните k е достатъчно да разгледаме $m2^{m-1} = (x-1)(x+1)$, като $x = 2z+1$ е нечетно за $m \geq 6$ (очевидно $m = 1,2,3,4$ не водят до решение, а $m = 5$ дава

$x = 9$), т.е. имаме $m2^{m-3} = z(z+1)$. Множителите вдясно са взаимнопрости, откъдето 2^{m-3} дели точно едно от z и $z+1$ – значи $z \geq 2^{m-3} - 1$ и $m \geq 2^{m-3} - 1$, невъзможно за $m \geq 6$.

Оценяване. (7 точки) По 1 т. за верен отговор, (†), (††), (∗), (∗∗), нечетно k и четно k.

Задача 10.1. Да се намерят всички стойности на реалното число x, за което числата

$$a_1 = \sqrt{x^2 + 4x - 3}, \qquad a_2 = \sqrt{\frac{3}{4}x^2 + 3x + 1}, \qquad a_3 = \sqrt{2x^2 + 8x + 1}$$

образуват в този ред растяща аритметична прогресия.

Отговор. $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}$.

Решение. Условието е еквивалентно на $a_1 < a_2 < a_3$ и $a_1 + a_3 = 2a_2$. От второто равенство, получаваме

$$\sqrt{x^2 + 4x - 3} + \sqrt{2x^2 + 8x + 1} = 2\sqrt{\frac{3}{4}x^2 + 3x + 1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2 + 4x - 3} + \sqrt{2x^2 + 8x + 1} = \sqrt{3x^2 + 12x + 4}.$$

Нека положим $u = x(x+4)$. Горното равенство е тъждествено на

$$\sqrt{u - 3} + \sqrt{2u + 1} = \sqrt{3u + 4}, \qquad \text{ДО: } u \geq 3.$$

Вдигайки на квадрат двете страни на уравнението (и двете са неотрицателни и операцията е тъждествена), получаваме

$$3u - 2 + 2\sqrt{2u^2 - 5u - 3} = 3u + 4 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2u^2 - 5u - 3} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2u^2 - 5u - 3 = 9.$$

Квадратното уравнение $2u^2 - 5u - 12 = 0$ има два реални корена $u_1 = -3/2$ и $u_2 = 4$. От тях, само втория е в дефиниционната област $u \geq 3$. Връщайки се обратно към променливата x, получаваме

$$x(x+4) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}.$$

И при двете възможни стойности за x имаме, че $a_1 = \sqrt{4-3} = 1$, $a_2 = \sqrt{\frac{3}{4} \cdot 4 + 1} = 2$ и $a_3 = \sqrt{2 \cdot 4 + 1} = 3$. Следователно $a_1 < a_2 < a_3$ е изпълнено и $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}$ са решение на задачата.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за преобразуване във вида $a_1 + a_3 = 2a_2$; 1 т. за коректно определяне на дефиниционната област на променливата; 2 т. за решаване на уравнението спрямо u; 1 т. за решаване на квадратното уравнение за връщане на променливата; 1 т. за проверка, че $a_1 < a_2 < a_3$.

Задача 10.2. Нека D е произволна точка от страната BC на неравнобедрения остроъгълен триъгълник ABC. Окръжността с център D и радиус DA пресича лъчите $AB^{\to}$ (след B) и $AC^{\to}$ (след C) съответно в точките M и N. Да се докаже, че ортоцентърът на триъгълника AMN лежи на постоянна права, която не зависи от избора на D.

Решение. Нека P и Q са петите на перпендикулярите от D към AB и AC. Тогава $AP = PM$, $AQ = QN$ и значи от хомотетията с център A и коефициент $\frac{1}{2}$ (или съображения със средни отсечки) следва, че е достатъчно да докажем, че ортоцентърът на триъгълника APQ лежи на фиксирана права.

Нека B_1 и C_1 са височините от върховете B и C – ще докажем, че търсената права е B_1C_1 (един начин да се заподозре това е чрез разглеждането на $D = B$ и $D = C$). Нека правата през A, перпендикулярна на PQ, пресича B_1C_1 в T. Поради известната формула $AH = 2R\cos\gamma$ (за триъгълник ABC с ортоцентър H, радиус R на описаната окръжност и $\measuredangle ACB = \gamma$) и това, че $APDQ$ е вписан в окръжност с диаметър AD, е достатъчно да докажем, че $AT = AD\cos\measuredangle ACB$.

От окръжността на $APDQ$ следва $\measuredangle BAD = 90^\circ - \measuredangle ADP = 90^\circ - \measuredangle AQP = \measuredangle TAB_1$. Също, четириъгълникът BCB_1C_1 е вписан в окръжност, откъдето $\measuredangle AB_1T = \measuredangle ABD$. Следователно $\triangle ABD \sim \triangle ATB_1$ и чрез правоъгълния триъгълник AA_1B заключаваме

$$AT = \frac{AD}{AB}\cdot AB_1 = AD\cdot\frac{AB_1}{AB} = AD\cos\measuredangle ACB.$$

Оценяване. (6 точки) 1 т. за свеждане до триъгълника APQ; 1 т. за ясно изразена идея, че въпросната права (в новата задача) е B_1C_1; 2 т. за $\triangle ABD \sim \triangle ATB_1$; 2 т. за довършване.

Задача 10.3. Във връзка с формирането на редовно правителство, Президентът поканил всички 240-ма депутати на три отделни консултации, като всеки депутат участвал в точно една консултация и на всяка от консултациите присъствал поне един депутат. Предстои да се проведат разговори между двойки депутати за обсъждане на консултациите. Възможно ли е те се проведат така, че да съществува цяло неотрицателно число k, такова че за всеки двама депутати, участвали в различни консултации, да има точно k депутати, участвали в останалата консултация, с които всеки от двамата да разговаря, и точно k депутати, участвали в останалата консултация, с които никой от двамата да не разговаря? Да се намерят всички възможни стойности на k.

Отговор. $k = 20$.

Решение. Да означим трите проведени консултации с $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, а броя на участващите в тях депутати съответно с a, b, c. По условие $a, b, c > 0$ и $a + b + c = 240$. Ако двама са обсъждали заедно, то ще казваме, че те се познават, а иначе – не. Познанството е взаимно. Да разгледаме граф G с върхове депутатите. Нека свържем с червено ребро всеки двама депутати от различни комисии, които се познават, а със синьо – които не се познават. Получаваме пълен триделен граф с компоненти $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ и брой на триъгълниците в него abc. Всеки триъгълник е или едноцветен, или има две страни в единия цвят и една в другия.

Нека $A \in \mathcal{A}$ и $B \in \mathcal{B}$ са произволни. Те са свързани с ребро. Независимо дали то е червено или синьо, A и B участват заедно в точно k едноцветни триъгълника със страни ребра на G. Тъй като във всеки триъгълник участва по точно един връх от трите компоненти, то броят едноцветни триъгълници в G ще е равен на kab (за всеки избор на елемент на $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ има точно k такива и всеки два различни избора водят до различни триъгълници). Аналогично броят едноцветни триъгълници в G е равен на kac и kbc. Следователно

$$kab = kac = kbc. \tag{1}$$

Да допуснем, че $k = 0$. Тогава няма едноцветни триъгълници. Разглеждаме произволен елемент $A \in \mathcal{A}$. Ако той познава [не познава] поне по един човек и от $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, то той се явява общ познат [непознат] за тази двойка, което противоречи на условието и допускането, че $k = 0$. Следователно всичките познати на A са или в $\mathcal{B}$ или в $\mathcal{C}$. Нека са в $\mathcal{B}$. Ако съществува $B \in \mathcal{B}$, който не е познат за A, то A е общ непознат за B и произволен елемент на $\mathcal{C}$ – противоречие. Следователно, A познава всички в $\mathcal{B}$. Аналогично, щом всеки в $\mathcal{B}$ познава A, то всеки в $\mathcal{B}$ ще познава всеки в $\mathcal{A}$ и никой в $\mathcal{C}$. Тогава, за всеки избор на елементи от $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, всеки елемент на $\mathcal{C}$ е общ непознат – противоречие. Оттук $k = 0$ е невъзможно. Следователно, $k \neq 0$ и от (1) заключаваме, че $a = b = c = 80$.

Сега ще покажем, че ако описаното е възможно, то $k = 20$. За целта ще изброим всички разноцветни триъгълници спрямо единствената страна в различен от другите цвят. Нека $A \in \mathcal{A}$ и $B \in \mathcal{B}$ са произволни. Според условието те ще участват заедно в точно k разноцветни триъгълника със страни ребра на G, за които AB е единствената страна в различен цвят (общите k познати/непознати на A и B, в зависимост дали A и B не се познават или се познават). Следователно всяка двойка депутати от различни консултации е единствената страна в различен цвят в точно k разноцветни триъгълника на G. Всички тези триъгълници са два по два различни и общият им брой е $\binom{3}{2}.a.a = 3a^2$. Оттук общият брой разноцветни триъгълници е $3ka^2$. Добавяйки едноцветните триъгълници от (1), за общия брой получаваме $a^3 = ka^2 + 3ka^2 = 4ka^2$, откъдето $k = \frac{a}{4} = 20$.

Ето една възможна конструкция при $k = 20$. Разглеждаме куб. На всеки от 12-те ръба слагаме по 20-ма депутати. Депутатите на всяка четворка успоредни ръбове са в една консултация. Двама депутати се познават точно когато ръбовете им са инцидентни (т.е. имат общ връх). Които и двама да изберем от неуспоредни ръбове (независимо дали ръбовете са инцидентни), има точно един ръб от третото направление, инцидентен и за двата, и точно един ръб от третото направление, неинцидентен и за двата.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за $k \neq 0$; 1 т. за $a = b = c = 80$; 2 т. за $k = a/4 = 20$; 3 т. за работещ пример за $k = 20$.

Задача 10.4. Нека функцията $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ е такава, че

$$f(a,b) + f(b,c) = f(ac, b^2) + 1$$

за всички естествени числа a, b и c. Известно е, че съществува естествено число n, такова че $f(n,m) \leq f(n,m+1)$ за всяко естествено число m. Да се намерят всички възможни стойности на $f(2025, 2025)$.

Отговор. 1.

Решение. Функцията $f \equiv 1$ изпълнява условията и $f(2025, 2025) = 1$. Нека сега допуснем, че е възможно $f(2025, 2025) > 1$. Сравнявайки полаганията $(a,b,c) = (x,y,y)$ и $(a,b,c) = (y,y,x)$, получаваме, че $f(x,y) = f(y,x)$ за всички $x, y \in \mathbb{N}$. Следователно, ако дефинираме функцията $g\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, така че $g(a,b) := f(a,b) - 1$ за всички естествени числа a и b, то оригиналното функционално уравнение става

$$g(a,b) + g(c,b) = g(ac, b^2).$$

Нека $P(a,b,c)$ означава полагането на (a,b,c) в това уравнение. При $b = 1$ получаваме, че функцията $h(x) := g(x,1)$ зависи единствено от стойностите на $h(p)$ за всички прости числа

p. Тоест, по индукция имаме:

$$h(x) = \sum_{p\text{-просто}} h(p)\nu_p(x). \tag{2}$$

Сега ще докажем, че $h(3) > 0$ или $h(5) > 0$. Ако допуснем противното, то

$$h(45) = g(45, 1) = 2g(3, 1) + g(5, 1) = 0.$$

Оттук и от $P(1, 45, 45)$ следва, че $g(45, 2025) = g(45, 45)$. Освен това $P(1, 45, 2025)$ дава $g(2025, 2025) = g(45, 2025) = g(45, 45)$. Но $g(2025, 2025) = 2g(45, 45)$ от $P(45, 45, 45)$, откъдето $g(2025, 2025) = 0$, което е противоречие. Следователно $h(3) > 0$ или $h(5) > 0$.

Основното заместване, което ще използваме, е $P(1, x, n)$, което дава $h(x) + g(n, x) = g(n, x^2)$. Продължавайки с $P(1, x^2, n)$, $P(1, x^4, n)$ и така нататък, по индукция получаваме $g(n, x^{2^k}) = g(n, x) + (2^k - 1)h(x)$. Ако допуснем, че $h(x) > h(x+1)$ за някое естествено число x, то:

$$g(n, x) + (2^k - 1)h(x) = g(n, x^{2^k}) \leq g(n, (x+1)^{2^k}) = g(n, x+1) + (2^k - 1)h(x+1).$$

Последното не може да е вярно за всички k, тъй като $h(x) > h(x+1)$, а $g(n, x)$ и $g(n, x+1)$ са константи. Следователно $h(x) \leq h(x+1)$ за всички $x \in \mathbb{N}$ и така свеждаме задачата до случая $n = 1$. Тъй като $h(3) > 0$ или $h(5) > 0$, то $h(p) > 0$ за всяко просто $p \geq 5$ понеже h е монотонно растяща. Нека $a = 5^{h(7)} > 1$ и $b = 7^{h(5)} > 1$. Ясно е, че $a \neq b$, така че нека без ограничение на общността допуснем, че $a < b$ (случаят $b > a$ е аналогичен). Тогава имаме

$$h(a^k) = h(5^{kh(7)}) = kh(5)h(7) = h(7^{kh(5)}) = h(b^k).$$

Понеже h е монотонно растяща, то получихме, че $h(a^k) = h(a^k + 1) = \ldots = h(b^k)$. Остава да изберем просто число $q > h(5)h(7)$ и $k = q + 1$, така че

$$b^{\frac{q+1}{q}} - a^{\frac{q+1}{q}} > ba^{\frac{1}{q}} - a^{\frac{q+1}{q}} = a^{\frac{1}{q}}(b - a) > b - a \geq 1.$$

Оттук следва, че съществува естествено число t, за което $a^{q+1} < t^q < b^{q+1}$. От по-горе, обаче, имаме $qh(t) = h(t^q) = h(a^{q+1}) = (q+1)h(5)h(7)$, което е противоречие понеже $q \nmid (q+1)h(5)h(7)$. С това задачата е решена.

Оценяване. (7 точки) Общо 1 т. за въвеждане на g, h и изкарване на (1), 1 т. за отхвърляне на случая $h \equiv 0$ при $f(2025, 2025) > 1$, 3 т. за допускане на противното и доказване, че h е монотонно растяща, 2 т. за довършване.

Задача 11.1. Даден е правоъгълен триъгълник ABC с прав ъгъл при върха C и радиус на вписаната окръжност r. Окръжност с радиус t се допира до страните AB и CB съответно в точки P и Q. Ако $t \cdot AC = 2r^2$, то да се докаже, че триъгълник APC е равнобедрен.

Решение. (*Първи метод*) Нека I е центърът на вписаната в ABC окръжност и тя се допира до AB в точка R. Ако O е центърът на k, то $\triangle BOP \sim \triangle BIR$. От условието и това подобие получаваме:

$$\frac{a+b-c}{b} = \frac{2r}{b} = \frac{t}{r} = \frac{BP}{BR} = \frac{2BP}{a+c-b}.$$

От горното и от $a^2+b^2=c^2$ намираме:

$$(a+b-c)(a+c-b)=2b.BP \iff a^2-b^2-c^2+2bc=2b.BP$$

$$\iff 2b(c-b)=2b.BP \iff c-b=BP.$$

Следователно $AP=c-BP=b$, откъдето $AP=AC$.

(*Втори метод*). Нека вписаната в $\triangle ABC$ окръжност се допира до AB в т. T. Тъй като $r<AC/2$, то $t<r$. Това означава, че $BP<BT$. Да разгледаме $\triangle ABC$, в който BC е много по-малка от AC. Тогава точка T (а следователно и т. P) е прекалено близко до т. B. Така единствената възможност $\triangle APC$ да е равнобедрен е $AP=AC$. Нека го докажем.

Да забележим, че при фиксиран $\triangle ABC$ има единствено $t>0$, за което $t\cdot AC=2r^2$. Да построим т. $P'\in AB$, такава че $AP'=AC$. Нека t' е радиусът на окръжността, която се допира до страните AB и CB съответно в точки P' и Q'. Достатъчно е да проверим, че:

$$t'\cdot AC=2r^2 \qquad (1)$$

Да означим $AB=c, \measuredangle BAC=\alpha$. Идеята е да изразим t', AC и r чрез c и α и да проверим (1). Имаме: $AC=c\cos\alpha$, $BC=c\sin\alpha$, $r=p-c=(c\sin\alpha+c\cos\alpha-c)/2$, $BP'=c-c\cos\alpha$, $BT=p-c\cos\alpha=(c+c\sin\alpha-c\cos\alpha)/2$. Тъй като двете окръжности са хомотетични с център B следва:

$$\frac{t'}{r}=\frac{BP'}{BT}=\frac{2(1-\cos\alpha)}{1+\sin\alpha-\cos\alpha}$$

$$t'=\frac{2r(1-\cos\alpha)}{1+\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{c(\sin\alpha+\cos\alpha-1)(1-\cos\alpha)}{1+\sin\alpha-\cos\alpha}.$$

$$\begin{aligned}
(1) \iff & \frac{c(\sin\alpha+\cos\alpha-1)(1-\cos\alpha)}{1+\sin\alpha-\cos\alpha}\cdot c\cos\alpha=\frac{1}{2}c^2(\sin\alpha+\cos\alpha-1)^2\\
\iff & \frac{(1-\cos\alpha)\cos\alpha}{1+\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{1}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha-1)\\
\iff & 2(1-\cos\alpha)\cos\alpha=\sin^2\alpha-(1-\cos\alpha)^2\\
\iff & 2\cos\alpha=2\cos\alpha.
\end{aligned}$$

С това проверката на (1) е завършена.

Оценяване. (6 точки) *Първи метод*: 1 т. за разглеждане на подобните триъгълници; 4 т. за намиране $BP=c-b$; 1 т. за довършване. *Втори метод*: 2 т. изразяване на всички величини чрез c,α; 5 т. за довършване на проверката.

Задача 11.2. За реалния параметър k да означим с $m(k)$ по-малкия реален корен на уравнението:

$$12(k^2+2)x^2+12kx-7k^2-12=0. \qquad (1)$$

Докажете, че функцията $m(k), k\in\mathbb{R}$ има най-голяма стойност и я намерете.

Решение. Да забележим, че (1) винаги има две решения, които са с различни знаци (от формулите на Виет). Следователно $m(k) < 0$, а другият корен е положителен. Нека означим $X = \{m(k) : k \in \mathbb{R}\}$. Да запишем (1) във вида

$$(12x^2 - 7)k^2 + 12xk + 24x^2 - 12 = 0. \qquad (2)$$

Тогава $X = \{x < 0 :\ (2) \text{ има реално решение относно } k\}$. Ясно е, че (2) има реално решение относно k тогава и само тогава, когато дискриминантата му е неотрицателна. И така, да намерим всички $x < 0$ удовлетворяващи

$$D := 12^2x^2 - 4(12x^2 - 7)(24x^2 - 12) \geq 0. \qquad (3)$$

Като положим $y = x^2$, получаваме, че (3) е еквивалентно на:

$$-24y^2 + 29y - 7 \geq 0 \text{ и } y \geq 0,$$

което е еквивалентно на $y \in \left[\frac{1}{3}, \frac{7}{8}\right]$. И така (2) има реално решение относно k тогава и само тогава, когато

$$x \in \left[-\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right] \bigcup \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}\right].$$

Следователно

$$X = \{x < 0 :\ (2) \text{ има реално решение относно } k\} = \left[-\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

$$\max X = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Оценяване. (6 точки): 1 т. за аргументация защо по-малкият корен е отрицателен; 2 т. за свеждане до намиране на максималното $x < 0$, за което (2) има реално решение относно k; 3 т. за довършване.

Задача 11.3. Имаме n на брой пула, които първоначално са поставени на числовата ос върху числото 0. На всеки ход избираме число $x \in \mathbb{Z}$, върху което има поставени поне два пула; вземаме два от тях, след което поставяме единия върху $x - 1$, а другия – върху $x + 1$.
а) Да се докаже, че след краен брой хода, без значение как ги избираме, ще се получи крайна позиция, в която няма два пула върху едно и също число.
б) За всяка възможна крайна позиция, с Δ означаваме разликата между числата, върху които стоят най-десният и най-левият пул. Да се намерят всички възможни стойности на Δ в зависимост от n.

Решение. а) В дадена конфигурация от пулове, *дупка* наричаме цяло число, върху което няма поставен пул, но има пулове както от едната му страна, така и от другата. Да забележим първо, че както и да играем, две последователни дупки не могат да възникнат. Наистина, да разгледаме първия момент, в който възникват две последователни дупки – да кажем на позиции y и $y + 1$. Значи на предишния ход е имало пул (поне един) или върху y

или върху $y+1$. И в двата случая, двете позиции не могат да останат празни на следващия ход. Нека P е множеството от пулове. За определена позиция и $p \in P$, да означим с $n(p)$ числото, върху което пулът p е стъпил. Лесно се вижда, че $\sum_{p \in P} n(p)^2$ се увеличава с две при всеки ход. Наистина, нека два пула в даден момент са върху числото x, след което единият отива в $x-1$, а другият в $x+1$. Твърдението следва от равенството

$$(x+1)^2 + (x-1)^2 = 2x^2 + 2.$$

Да забележим също, че $\sum_{p \in P} n(p)$ се запазва при всеки ход и тъй като в началната позиция тази величина е 0, тя остава 0 при всеки ход. Да допуснем сега, че процесът продължава вечно. От казаното следва, че ще има пулове, които отиват все по надясно върху числовата ос, както и такива, които отиват все по-наляво. Така ще възникне позиция, в която има две последователни дупки: противоречие.

б) Отговор: единствената възможна стойност за $\Delta = n$, когато n е четно, и $\Delta = n-1$ в случай на нечетно n. Ще докажем, че при n нечетно, крайната конфигурация представлява непрекъсната редица от пулове (без дупки), а при n четно, в крайната конфигурация има само една дупка. Нека разгледаме обратната задача: Върху целите числа имаме разположени n пула, като няма два пула върху едно и също число. Имаме право да вземем по един пул от $x-1$ и $x+1$ и да сложим два върху x. Ако, прилагайки тази операция, е възможно да наредим всички пулове върху числото 0, то началната конфигурация наричаме допустима.

1. Конфигурация от пулове с две последователни дупки не е допустима. Наистина при операцията няма как върху тези две дупки да сложим пул, така че те винаги ще разделят пуловете.

2. Конфигурация с поне две дупки не е допустима. Да разгледаме редичката от единични пулове между две дупки; нека те са k на брой. Ако приложим операцията върху два пула измежду тях, то или ще се образуват две последователни дупки, или ще се появят две дупки с по-малко от k единични пула между тях. При всеки друг ход, или се появяват две последователни дупки, или конфигурацията с двете дупки и k единични пула между тях се запазва. Така или ще попаднем в ситуацията на точка 1, или ще се запази редичка от единични пулове с две дупки от двете им страни.

И така, допустимите конфигурации могат да имат най-много една дупка. От друга страна, както казахме в а), $\sum_{p \in P} n(p) = 0$ при всяка допустима конфигурация. От това лесно следва, че при нечетно n допустимата конфигурация е само една: последователно наредени пулове, средният от които е върху нулата. При четно n също има само една допустима конфигурация: последователно наредени пулове с дупка върху нулата. Така че за търсената разлика има единствена възможност: n, когато n е четно, и $n-1$ в случай на нечетно n.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за доказване на а); 2 т. за наблюдението, че веригата от пулове не може много да се 'разкъсва'; 3 т. за довършване.

Задача 11.4. Дадено е множество A от 2025 цели неотрицателни числа и функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, удовлетворяваща следните две свойства.

1. За всеки две различни числа $x, y \in \mathbb{N}$ съществува $a \in A$, за което
$$x - y \mid f(x+a) - f(y+a) \qquad (1).$$
2. За всяко $N \in \mathbb{N}$ съществува $t \in \mathbb{N}$, за което $f(x) \neq f(y), \forall x, y \in [t, t+N], x \neq y$.

Да се докаже, че съществуват безкрайно много прости числа p, такива че $p \mid f(x)$ за някое $x \in \mathbb{N}$. (Навсякъде $\mathbb{N}$ означава множеството на целите положителни числа.)

Решение. Нека допуснем, че твърдението на задачата не е вярно, т.е. съществуват само краен брой прости числа $p_1, p_2, \ldots, p_k$ така че $\forall x \in \mathbb{N}$ всички прости делители на $f(x)$ са измежду тях. Да положим в т.1 $y = 1, x = \ell p_1^m \cdots p_k^m + 1$ за $\ell, m \in \mathbb{N}$. Получаваме, че
$$p_1^m \cdots p_k^m \mid f(\ell p_1^m \cdots p_k^m + 1 + a) - f(1+a) \qquad (1)$$
за някое $a \in A$. Нека $f(1+a) = p_1^{\alpha_1(a)} p_2^{\alpha_2(a)} \cdots p_k^{\alpha_k(a)}$, $a \in A$. Да фиксираме $m \geq \max\{a_i(a) : 1 \leq i \leq k, a \in A\}$. Съгласно (1), най-голямата степен на p_i, която дели $f(\ell p_1^m \cdots p_k^m + 1 + a)$, е $p_i^{\alpha_i(a)}$. Нещо повече, няма други прости числа освен $p_i, 1 \leq i \leq k$, които делят $f(\ell p_1^m \cdots p_k^m + 1 + a)$ (от допуснатото). Следователно
$$f(\ell p_1^m \cdots p_k^m + 1 + a) = p_1^{\alpha_1(a)} \cdots p_k^{\alpha_k(a)} = f(1+a) \qquad (2)$$
Забележете, че в (2), $a = a(\ell)$ зависи от ℓ. За всеки $|A| + 1$ последователни стойности на ℓ, съгласно принципа на Дирихле, има две: ℓ_1, ℓ_2, за които $a(\ell_1) = a(\ell_2)$. Това означава, че
$$f(\ell_1 p_1^m \cdots p_k^m + 1 + a(\ell_1)) = f(\ell_2 p_1^m \cdots p_k^m + 1 + a(\ell_2)).$$
От казаното лесно се вижда, че във всеки интервал с дължина $(|A| + 2)\, p_1^m \cdots p_k^m$ има две различни числа, в които функцията приема равни стойности. Това противоречи на т.2 от условието, което е противоречие с допускането.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за установяване на (1); 1 т. за (2); 5 т. за довършване.

Задача 12.1. Нека $a, b, c > 0$ са реални числа, за които $a + b > c$. Да се докаже, че за всяко $x \in \left(0; \frac{\pi}{a+b+c}\right)$ е в сила неравенството $ax + \sin bx + \cos cx > 1$.

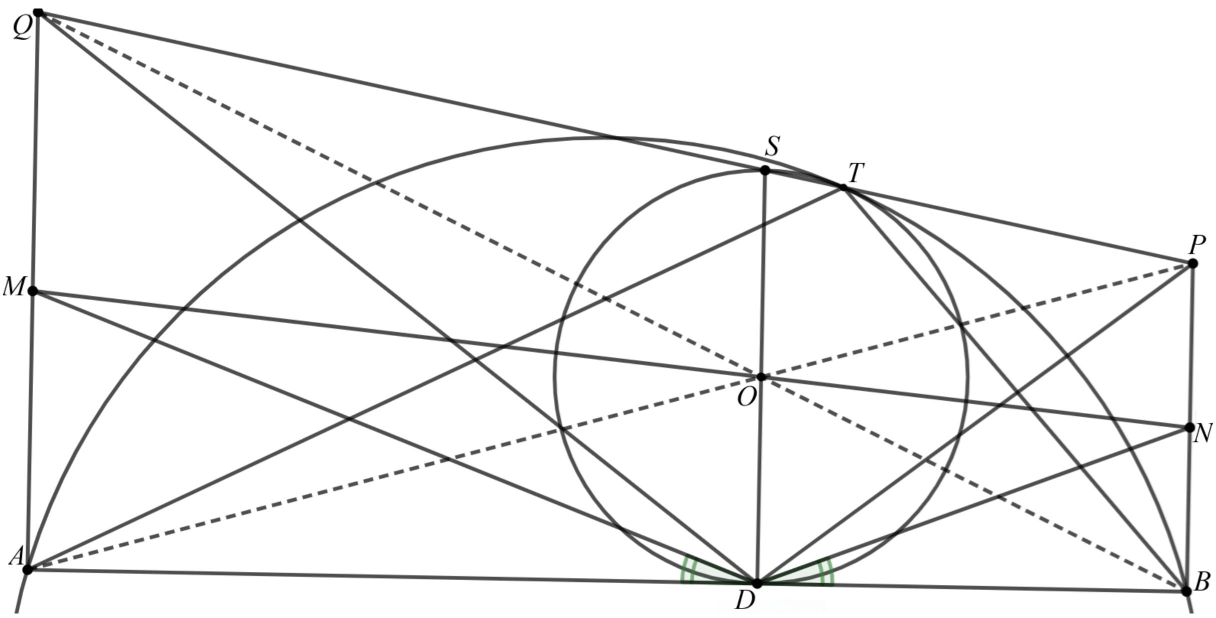
Решение. От неравенството $x > \sin x$ за $x > 0$ и неравенството на триъгълника $\sin x + \sin y \geq \sin(x+y)$ за $x, y > 0, x + y < \pi$ имаме, че
$$ax + \sin bx + \cos cx > \sin ax + \sin bx + \cos cx \geq \sin(a+b)x + \cos cx$$
От друга страна имаме, че $\sin{(a+b)x} \geq \sin cx$, тъй като $(a+b)x < \pi - cx$ и $(a+b)x > cx > 0$ за $x \in \left(0; \frac{\pi}{a+b+c}\right)$. Така получаваме, че
$$\sin{(a+b)x} + \cos cx \geq \sin cx + \cos cx = \sqrt{\sin^2 cx + \cos^2 cx + 2\sin cx \cos cx} = \sqrt{1 + \sin 2cx} > 1$$
поради $0 < 2cx < (a+b+c)x < \pi$.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за $ax > \sin ax$; 2 т. за $\sin ax + \sin bx \geq \sin(a+b)x$; 1 т. за $\sin(a+b)x \geq \sin cx$; 2 т. за $\sin cx + \cos cx > 1$.

Задача 12.2. Окръжност ω се допира вътрешно до окръжност Ω в точка T (като радиусът на ω е по-малък от този на Ω). Точката A се движи по Ω, а точката $B \in \Omega$ е такава, че AB се допира до ω. Нека точка P е пресечната точка на външната ъглополовяща на $\measuredangle ATB$ и правата през B, перпендикулярна на AB. Да се докаже, че когато точка A се движи по Ω, правата AP минава през фиксирана точка.

Решение. Ще докажем, че правата AP винаги минава през точка O - центърът на ω. Нека Q е пресечната точка на правата през A, перпендикулярна на AB и TP и нека $AB \cap \omega = D$. От хомотетия с център T, изпращаща ω в Ω имаме, че правата TD е вътрешната ъглополовяща на $\measuredangle ATB$. Нека точките M и N са средите на отсечките AQ и BP съответно, а точка S е втората пресечна точка на правата TP и ω. Да отбележим, че поради $\measuredangle STD = 90^\circ$ точка O е среда на отсечката TD. Тогава точките M, N и O лежат на една права, тъй като са среди на тройката успоредни отсечки AQ, BP и DS.

Така, за да докажем, че точка O е пресечната точка на AP и BQ, е достатъчно да докажем, че $\frac{MO}{NO} = \frac{AQ}{BP}$, тъй като пресечната точка на диагоналите на трапеца $QABP$ е единствената точка върху отсечката MN, която я разделя в това отношение.



Фигура 1:

От друга страна имаме, че четириъгълникът $DAQT$ е вписан, понеже $\measuredangle DAQ = \measuredangle QTD = 90^\circ$ и аналогично четириъгълникът $DBPT$ също е вписан. Така получаваме, че $\measuredangle AQD = \measuredangle ATD = \measuredangle DTB = \measuredangle DPB$, т.е $\triangle AQD \sim \triangle BPD$. Оттук $\measuredangle MDQ = \measuredangle NDP$, $\measuredangle ADQ = \measuredangle BDP$ и $\frac{DM}{DN} = \frac{AQ}{BP}$. Следователно $\measuredangle MDO = 90^\circ - \measuredangle ADQ + \measuredangle MDQ = 90^\circ - \measuredangle BDP + \measuredangle NDP = \measuredangle NDO$ и значи O е петата на ъглополовящата на $\measuredangle MDN$ в $\triangle MDN$. Последното означава, че $\frac{MO}{NO} = \frac{MD}{ND} = \frac{AQ}{BP}$, откъдето следва, че т.$O = AP \cap BQ$ и задачата е решена.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за построяване на точки Q, O, S, D; 1 т. за доказване, че $O \in MN$; 2 т. за $\frac{DM}{DN} = \frac{AQ}{BP}$; 2 т. за довършване.

Задача 12.3. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{N}_{\geq 2025} \to \mathbb{N}$ със следните свойства:

1. Съществува полином P с цели коефициенти такъв, че $f(n) \leq P(n)$ за всяко $n \in \mathbb{N}, n \geq 2025$.
2. $mn + 1 | f(m)f(n) + 1$ за всички $m, n \in \mathbb{N}_{\geq 2025}$.

Забележка. С $\mathbb{N}_{\geq 2025}$ означаваме множеството от цели числа, по-големи или равни на 2025.

Отговор. $f(n) = n^s$ за някое нечетно $s \in \mathbb{N}$.

Решение. Нека $p > 2025$ е просто число. Тогава ако $q \neq p$ е прост делител на $f(p)$, то можем да изберем $m \in \mathbb{N}$ такова, че $q | mp + 1$. Това обаче противоречи на $mp + 1 | f(m)f(p) + 1$, откъдето получаваме, че $f(p)$ е степен на p. От условието следва, че съществува естествено число k, за което $f(p) \leq p^k$ за всички достатъчно големи прости числа p. Така получаваме, че съществува естествено число s, за което $f(p) = p^s$ за безбройно много прости числа p. Също имаме, че $p^2 + 1 | p^{2s} + 1$, откъдето следва, че s е нечетно.
Нека $n \in \mathbb{N}_{\geq 2025}$ и нека $p > \max(|f(n) - n^s|, 2025)$ е просто число, за което $f(p) = p^s$. Имаме, че

$$pn + 1 | p^s f(n) + 1 \Rightarrow pn + 1 | p^s f(n) + 1 - (pn)^s - 1 \Rightarrow pn + 1 | p^s (f(n) - n^s)$$

Така получаваме, че $pn+1 | f(n) - n^s$, т.е $f(n) = n^s$. Директно се проверява, че тези функции изпълняват условието.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за $p | f(n) \Rightarrow p | n$; 1 т. за доказване, че за всяко $p > 2025$ имаме $f(p) = p^s$ за някое s; 1 т. за отбелязване, че съществува s, за което $f(p) = p^s$ за безбройно много p; 2 т. за $f(n) = n^s$ за всяко $n \geq 2025$; 1 т. за довършване.

Задача 12.4. Дадено е естествено число $n \in \mathbb{N}$. Ще казваме, че граф G с множетсво от върхове V съдържа копие на граф H с множество от върхове V_H, ако съществува инекция $f : V_H \to V$, за която ако $u, v \in V_H$ са такива, че uv е ребро в H, то $f(u)f(v)$ е ребро в G. Да се докаже, че ако G е граф с m ребра, който съдържа копие на всяко дърво T с n върха, то

$$m \geq n \ln n - 2n.$$

Решение. Нека S_i е звезда с i върха с център u, т.е граф с i върха, в който върхът u е свързан с всички останали и няма други ребра. Нека $k := \lfloor \frac{n}{i} \rfloor$ и нека T_i е дървото с n върха, което съдържа i копия на S_k, където с центрове $u_1, u_2, \ldots, u_i$, за които $u_j u_{j+1}$ е ребро за $j = 1, \ldots, i-1$ и копие на S_{n-ki} с център u_{i+1}, за което $u_i u_{i+1}$ е ребро.

Ще оцветяваме последователно ребрата на G в червено, като на $i-$тата стъпка ще оцветяваме $\lfloor \frac{n}{i} \rfloor - 1$ ребра, които не са били оцветявани преди. На първата стъпка разглеждаме копие на T_1 с център u_1 в G и оцветяваме неговите ребра в червено. На втората стъпка разглеждаме копие на T_2, което съдържа две копия на $S_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, поне едно от които не съдържа u_1. Нека неговият център е u_2 и нека оцветим ребрата му в червено.

В общия случай, на $i-$тата стъпка разглеждаме копие на T_i, съдържащо се в G, от което избираме копие на $S_{\lfloor \frac{n}{i} \rfloor}$, което не съдържа $u_1, u_2, \dots, u_{i-1}$. Взимаме u_i да е неговият център и оцветяваме ребрата му в червено. Така осигуряваме нови $\lfloor \frac{n}{i} \rfloor - 1$ червени ребра в G.

Прилагайки този алгоритъм за $i = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ последователно получаваме

$$m \geq \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor - 1 \right) \geq \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\frac{n}{i} - 2 \right) \geq n \sum_{i \leq \frac{n}{2}} \frac{1}{i} - n,$$

Така получаваме

$$m \geq n \sum_{i \leq n/2} \frac{1}{i} - n \geq n(\ln n - \ln 2) - n > n \ln n - 2n,$$

където използвахме неравенството $\sum\limits_{i \leq x} \frac{1}{i} \geq \ln x$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за разглеждане на T_i; 5 т. за алгоритъма на оцвеяване на ребрата в червено, т.е за $|E| \geq \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor - 1 \right)$; 1 т. за довършване (присъжда се само ако останалите са налични).

Забележка. За $|E| \geq \frac{n \log n}{2} + O(n)$ се присъждат до 4 т.

Задачите са предложени от: 8.1 и 8.3 – Ивайло Кортезов; 8.2, 8.4 и 9.4 – Мирослав Маринов; 9.1 и 9.2 – Константин Делчев; 9.3 – Любен Балтаджиев; 10.1 и 10.3 – Станислав Харизанов; 10.2 – Александър Иванов; 10.4 – Марин Христов; 11.1 – Емил Колев; 11.2, 11.3 и 11.4 – Драгомир Грозев; 12.1, 12.2 и 12.3 – Кристиян Василев; 12.4 – Данила Черкашин.